SISTEM FUNGSI ITERASI DAN EKSISTENSI INTERPOLASI FRAKTAL

ITERATED FUNCTION SYSTEMS AND THE EXISTENCE OF FRACTAL INTERPOLATION

Oleh: Widodo
Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta

Abstrak

Dalam makalah ini dipelajari Sistem Fungsi Iterasi (SFI) pada suatu ruang metrik lengkap (X,d). Beberapa sifat penting SFI, khususnya Teorema Titik Tetap pada ruang fraktal $\mathcal{H}$(X) digunakan untuk membuktikan teorema eksistensi interpolasi fraktal suatu data yang terdiri dari pasangan bilangan real $\{(x_i,F_i):i=0,1,2,\ldots,N\}$. Pembahasan dalam makalah ini ditekankan pada aspek teori yang didasari oleh pemahaman analisis real dan konstruksi fraktal, kemudian pembuktian teorema eksistensi interpolasi fraktal.

Kata kunci: Ruang metrik, ruang fraktal, pemetaan kontraksi, sistem fungsi iterasi, interpolasi fraktal.

Abstract

In this paper, the Iterated Function Systems (IFS) acting on a complete metric space (X,d) is studied. Several important properties of the IFS, in particular Fixed Point Theorem on the fractal space $\mathcal{H}$(X) are used to prove the existence of fractal interpolation of the data consisting of ordered pair real numbers $\{(x_i,F_i):i=0,1,2,\ldots,N\}$. The discussion in this paper is stressed on the theoretical aspects based on real analysis understanding and fractal construction, and then theorem of existence of fractal interpolation is proven.

Keywords: metric space, fractal space,contraction mapping,Iterated Function Systems, fractal interpolation.

PENDAHULUAN

Pada masa lalu, matematika memberikan perhatian sangat besar pada himpunan dan fungsi yang mulus (*smooth*), yang dapat dipelajari dengan kalkulus klasik. Sedangkan himpunan dan fungsi yang tidak mulus dan tidak teratur (*irregular*) cenderung diabaikan dan dijauhkan dari pembicaraan. Namun pada 2 dasawarsa terakhir ini anggapan tersebut telah berubah. Perhatian orang mulai ditujukan pula kepada himpunan-himpunan yang tak mulus. Lebih jauh lagi, himpunan yang tidak teratur memberikan penyajian yang lebih baik untuk fenomena alam dibandingkan dengan gambar-gambar dalam geometri klasik (tradisional). Geometri fraktal memberikan kerangka umum untuk mempelajari himpunan yang tidak teratur (*irregular sets*). Obyek-obyek alam, seperti gunung, pantai, awan dan pohon tidak dapat digambarkan dengan baik secara tradisional, yaitu dengan menggunakan Geometri Euclides. Akhirnya disadari bahwa Geometri Euclides hanya mampu mempresentasikan obyek-obyek buatan manusia, seperti garis, segitiga, segiempat, lingkaran, dll. Sedangkan Geometri Fraktal dapat mempresentasikan obyek-obyek yang muncul dalam alam dengan baik (Susanta, *et.al,* 1993:1-2).

Sebagai ilmu yang baru di Indonesia, banyak orang yang belum mamahami dan *bertanya "Apakah Fraktal itu ?", "Apakah dimensi fraktal itu ?", dan "Bagaimana cara menghitung dimensi fraktal ?", "Apakah interpolasi fraktal itu?".* Kata fraktal dikemukakan oleh Mandelbrot (1982:5) dalam makalahnya, *The Fractal Geometry of Nature*.

Kata 'fraktal' berasal dari kata latin *fractus* yang artinya patah atau putus untuk menyatakan benda-benda yang sangat tidak teratur. Mandelbrot mengatakan bahwa fraktal adalah himpunan yang mempunyai dimensi tak bulat atau dimensi Hausdorffnya lebih besar daripada dimensi topologisnya. Dimensi topologis suatu himpunan selalu bulat, bernilai 0 jika himpunan itu tak terhubung total (*totally disconnected*), dan bernilai 1 jika setiap titiknya mempunyai suatu persekitaran dengan perbatasan yang berdimensi 0, dst (Devaney, 1992:186). Falconer (1990:xx) lebih suka memberikan definisi fraktal secara deskriptif, dan tidak memberikan definisi secara eksplisit. Falconer mendefinisikan fraktal sebagai suatu himpunan dengan sifat-sifat sbb :

(i) mempunyai struktur halus (*fine structure*), yakni terinci pada skala yang sembarang kecilnya,
(ii) terlalu tak teratur untuk dinyatakan dalam geometri tradisional,
(iii) sering mempunyai bentuk yang berkesebangunan diri (*self similarity*),
(iv) dimensi fraktal biasanya lebih besar daripada dimensi topologisnya, dan
(v) dalam banyak hal fraktal didefinisikan sangat sederhana, sering secara rekursif.

Diberikan bilangan asli N>1 dan data $\{(x_i, F_i):i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$. Interpolasi adalah suatu proses menentukan suatu fungsi kontinu f yang grafiknya melewati data $\{(x_i,F_i):i = 0, 1, 2, \ldots, N\}$. Metode interpolasi paling sederhana adalah dengan menarik garis lurus dari masing-masing data tersebut ke titik yang berdekatan. Selain metode sederhana diatas, kita mempunyai metode lain yaitu dengan membentuk polinomial dengan derajat yang terendah sehingga polinomial tersebut merupakan grafik yang paling sesuai dengan grafik data dalam selang $[x_0,x_N]$.

Dalam makalah ini dipelajari Sistem Fungsi Iterasi (SFI) pada suatu ruang metrik lengkap (X,d). Beberapa sifat penting SFI, khususnya Teorema Titik Tetap pada ruang fraktal $\mathcal{H}(X)$ digunakan untuk membuktikan teorema eksistensi interpolasi fraktal suatu data terdiri dari pasangan bilangan real $\{(x_i,F_i):i=0,1,2,\ldots,N\}$. Pembahasan dalam makalah ini diktekankan pada aspek teori yan didasari oleh pemahaman analisis real da konstruksi fraktal, kemudian membuktika teorema eksistensi interpolasi fraktal.

PENGERTIAN DASAR

2.1 Konstruksi Ruang Fraktal (Barnsley da Demko, 1985:244-250)

Diberikan ruang metrik (X,d). Ruan metrik (X,d) dikatakan lengkap jika setia barisan Cauchy dari titik-titik di dalam $(X,d$ konvergen ke suatu titik di dalam X. Diberika (X,d) ruang metrik lengkap. Didefinisikan $\mathcal{H}(X$ sebagai koleksi semua subhimpunan kompa tak kosong dari X, i.e.

$$\mathcal{H}(X) := \{A: A \subset X, A \neq \varnothing \text{ dan A kompak}\}.$$

Didefinisikan $d(a,B)= \text{Min}\{d(a,b) : b\in B$ adalah jarak titik a ke himpunan B dan $d(A,B)=$ $\text{Maks}\{\text{Min}\{d(a,b): b \in B\} : a\in A\}=$ $\text{Maks}\{d(a,B) : a\in A\}$ adalah jarak himpunan A ke himpunan B. Disini $d(A,B)$ belum tentu sam dengan $d(B,A)$.

Untuk semua $A,B,C \in \mathcal{H}(X)$ berlaku :

(i) $A \neq B \Rightarrow d(A,B) \neq 0$ dan $d(B,A) \neq 0$
(ii) $A\subset B \Rightarrow d(A,B)= 0$
(iii) $A\subset B \Rightarrow d(C,B)\leq d(C,A)$
(iv) $d(A\cup B,C) = d(A,C) \vee d(B,C)$, dengan $\vee y = \text{maks}\{x,y\}$.

Metrik *Hausdorff* $h(A,B)$ dengan A dan B dalam $\mathcal{H}(X)$ didefinisikan sebagai

$$h(A,B) = \text{Maks}\{d(A,B), d(B,A)\}.$$

Untuk $A,B,C,D \in \mathcal{H}(X)$ berlaku

$$h(A\cup B, C\cup D) \leq h(A,C) \vee h(B,D).$$

Mudah dibuktikan bahwa fungs $h:\mathcal{H}(X)\times\mathcal{H}(X)\rightarrow R$ di atas merupakan metrik sehingga $(\mathcal{H}(X),h)$ adalah suatu ruang metrik Metrik h yang didefinisikan pada $\mathcal{H}(X)$ ir disebut *metrik Hausdorff*. Dalam hal ir $(\mathcal{H}(X),h)$ disebut ruang fraktal dan setia anggotanya disebut *fraktal*.

Teorema 2.1.1. (Barnsley, 1988:37)
Jika (X,d) ruang metrik lengkap, maka ruang fraktal ($\mathbb{H}(X),h$) juga ruang metrik lengkap, i.e. setiap barisan Cauchy $\{A_n\}$ dalam $\mathbb{H}$ (X) terdapat $A\in \mathbb{H}(X)$ sehingga $A = \lim_{n\to\infty} A_n$

2.2. Pemetaan Kontraktif dan Iterasi

Definisi 2.2.1. (Barnsley, 1988:80)
Pemetaan $f: (X,d)\to (X,d)$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat suatu konstanta s dengan $0\leq s<1$ sehingga

$$d(f(x), f(y)) \leq s\, d(x,y)\ ,\ \forall\, x, y\in X.$$

Konstanta s dinamakan faktor kontraktivitas.

Mudah dibuktikan bahwa jika f pemetaan kontraktif, maka f fungsi kontinu. Suatu titik $x_f \in X$ disebut titik tetap dari transformasi f jika $x_f = f(x_f)$.

Definisi 2.2.2. (Devaney,1992:17) *Diberikan pemetaan $f: (X,d)\to (X,d)$. Untuk semua bilangan bulat tak negatif $n\geq 0$, **iterasi** dari f, i.e. $f^n: X\to X$ didefinisikan dengan*

$$f^0(x) := x, f^1(x) := f(x), f^2(x) := f\circ f(x), \ldots,$$
$$f^{n+1}(x) := f\circ f^n(x) = f(f^n(x)),$$

untuk semua $x\in X$.

Teorema 2.2.2 (Barnsley, 1988:76)
Jika (X,d) ruang metrik lengkap dan f pemetaan kontraktif dari X ke X dengan faktor kontraktivitas s, maka f mempunyai tepat satu tetap $x_f\in X$ dan untuk semua $x\in X$, barisan $\{f^n(x): n = 1,2,\ldots\}$ konvergen ke x_f, i.e. $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f$.

SISTEM FUNGSI ITERASI (Barnsley, 1988 :82).

Sistem Fungsi Iterasi (SFI) difefinisikan sebagai suatu sistem yang terdiri dari ruang metrik lengkap (X,*d*) dan pemetaan-pemetaan kontraksi yang berhingga banyaknya, i.e. w_n: $X\to X$ dengan faktor kontraktivitas s_n untuk n=1,2,…,N. Dalam hal ini SFI diberi notasi $\{X: w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ dengan faktor kontraktivitas $s=\text{maks}\{s_n: n=1,2,3,\ldots,N\}$ seperti tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 3.1 (Barnsley, 1988:82)
Diberikan SFI $\{X: w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ dengan s_n faktor kontraktifitas w_n, $n=1,2,3,\ldots,N$. Jika transformasi $W: \mathbb{H}(X)\to \mathbb{H}(X)$ didefinisikan sebagai

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B)\ ,\ \forall\, B\in \mathbb{H}(X),$$

maka W merupakan pemetaan kontraksi pada ($\mathbb{H}(X),h$) dengan faktor kontraktivitas $s=\text{maks}\{s_n: n=1,2,3,\ldots,N\}$, *i.e.* $h(W(B),W(C)) \leq s\, h(B,C),\ \forall\, B,C\in \mathbb{H}(X)$.

SFI seperti itu disebut SFI hiperbolik. Akibatnya, dari Teorema 3.1 dan Teorema 2.2.2 (Teorema titik tetap), terdapat dengan tunggal titik tetap $A\in \mathbb{H}(X)$, i.e.

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$$

dan A ditentukan secara iteratif oleh

$$A = \lim_{n\to\infty} W^n(B)\ ,\ \forall\, B\in \mathbb{H}(X).$$

Titik tetap A ini disebut atraktor (*attractor*) SFI tersebut.

INTERPOLASI FRAKTAL

Definisi 4.1. (Barnsley, 1986:305). *Fungsi interpolasi suatu data $\{(x_i,F_i)\in R^2: i=0, 1,\ldots, N\}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, didefinisikan sebagai suatu fungsi kontinu $f:[x_0, x_N]\to R$ sehingga $f(x_i) = F_i$, untuk $i = 0, 1, \ldots, N$.*

Titik-titik $(x_i,F_i) \in R^2$ untuk $i = 0, 1, \ldots, N$, disebut titik-titik interpolasi dan dikatakan bahwa fungsi f menginterpolasikan data tersebut.

Definisi 4.2. (Barnsley, 1986:305). *Fungsi interpolasi fraktal suatu data $\{(x_i,F_i)\in R^2: i = 0, 1, \ldots, N\}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, didefinisikan sebagai suatu fungsi interpolasi $f:[x_0,x_N]\to R$ yang grafiknya merupakan atraktor dari suatu SFI.*

Dalam pembahasan interpolasi fraktal akan dikonstruksikan suatu SFI $\{R^2{:}w_n,\ n=1, 2,\ldots, N\}$ sehingga eksistensi atraktornya terjamin dan merupakan grafik dari suatu fungsi kontinu $f{:}[x_0,x_N]\to R$ yang meng-interpolasikan data $\{(x_i, F_i){:}\ i= 0,1, 2, \ldots, N\}$. Disini dipilih suatu SFI $\{R^2{:}w_n, n=1,2,\ldots,N\}$, dengan w_n tranformasi *affine* yang berbentuk khusus, i.e.

(4.1) $$w_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

yang dibatasi oleh

(4.2) $$w_n\begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad dan$$

$$w_n\begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix},$$

untuk $n = 1, 2, \ldots, N$.

Dari (4.1) dan (4.2) diperoleh :

(4.3) $a_n x_0 + e_n = x_{n-1}$

(4.4) $a_n x_N + e_n = x_n$

(4.5) $c_n x_0 + d_n F_0 + f_n = F_{n-1}$

(4.6) $c_n x_N + d_n F_N + f_n = F_n$,

untuk $n = 1, 2, \ldots, N$.

Kemudian dari (4.3) dan (4.4) diperoleh :

(4.7) $a_n = (x_n - x_{n-1})/(x_N - x_0)$,

(4.8) $e_n = (x_N x_{n-1} - x_0 x_n)/(x_N - x_0)$,

untuk $n = 1, 2, \ldots, N$. Dan dari (4.5) dan (4.6) kita mendapatkan dua persamaan dengan 3 variabel yang belum diketahui, dengan mengambil d_n sebagai varibel bebas, yang disebut *faktor penyekala vertikal* dan diperoleh :

(4.9) $$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - d_n\frac{F_N - F_0}{x_N - x_0},$$

(4.10) $$f_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - d_n\frac{x_N F_0 - x_0 F_N}{x_N - x_0}$$

Dari uraian diatas, dapat dipertanyakan berbagai macam hal, seperti kenapa kita menggunakan transformasi *affine* dan mengapa kita mengambil d_n sebagai parameter bebas. Penggunaan transformasi affine karena transformasi affine tidak akan merubah bentuk dan struktur, pemilihan transformasi *affine* diatas dan pengambil d_n sebagai variabel bebas kedua pertanyaan tersebut akan terjawab setelah kita mempelajari dan membuktikan teorema-teorema dibawah ini.

Teorema 4.3. *Diberikan bilangan asli $N>1$ dan SFI $\{R^2{:}\ w_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$ yang telah dikonstruksikan pada (4.1) dan (4.2), yang berkaitan dengan data $\{(x_n,F_n){:}\ n=0,1,2,\ldots, N\}$. Jika faktor penyekala vertikal d_n memenuhi $0 \le |d_n| \le 1$, untuk $n = 1, 2, \ldots, N$, maka terdapat suatu metrik d pada R^2, yang equivalen dengan metrik Euclides, sehingga SFI-nya hiperbolik terhadap metrik d. Khususnya terdapat dengan tunggal suatu atraktor G, i.e. G subhimpunan kompak tak kosong dalam R^2 yang memenuhi*

$$G = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(G).$$

Bukti: Didefinisikan suatu metrik d pada R^2:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + \theta|y_1-y_2|,$$

untuk semua $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R^2$, dengan θ suatu bilangan positif yang akan ditentukan kemudian. Mudah dibuktikan d merupakan metrik pada R^2 yang equivalen dengan metrik Euclides. Ambil $n \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ dan a_n, c_n, e_n, f_n, yang telah ditentukan berdasarkan pada persamaan (4.7), (4.8), (4.9), (4.10). Maka diperoleh:

$d(w_n(x_1,y_1),w_n(x_2,y_2))$
$=d((a_nx_1+e_n,c_nx_1+d_ny_1+f_n),(a_nx_2+e_n,c_nx_2+d_ny_2+f_n))$
$= |a_nx_1+e_n-(a_nx_2+e_n)|+\theta|c_nx_1+d_ny_1+f_n - (c_nx_2+d_ny_2+f_n)|$
$= a_n|x_1-x_2| + \theta|c_n(x_1-x_2) + d_n(y_1-y_2)|$
$\le |a_n|\,|x_1-x_2| + \theta|c_n(x_1-x_2)| + \theta|d_n(y_1-y_2)|$
$= |a_n|\,|x_1-x_2| + \theta|c_n|\,|x_1-x_2| + \theta|d_n|\,|y_1-y_2|$
$= (|a_n|+\theta|c_n|)\,|x_1-x_2| + \theta|d_n|\,|y_1-y_2|$.

Karena $N\ge 2$, diperoleh

$$|a_n| = |x_n - x_{n-1}|/|x_N - x_0| < 1$$

- Jika $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$, dipilih $\theta = 1$, sehingga didapat

$d(w_n(x_1,y_1),w_n(x_2,y_2))$

$\leq (|a_n|+\theta|c_n|)\,|x_1-x_2| + \theta|d_n|\,|(y_1-y_2)|$
$= |a_n|\,|x_1-x_2| + |d_n|\,|(y_1-y_2)|$
$\leq s\, d((x_1,y_1), (x_2,y_2)),$

dengan $s = \text{Maks}\{|a_n|,|d_n| : n=1,2,\ldots, N\}<1$, i.e. $\{R^2 : w_n,\ n=1,2,\ldots,N\}$ SFI hiperbolik terhadap metrik d.

- Untuk yang lain, dipilih

$$\theta = \frac{\text{Min}\{1-|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{\text{Max}\{2|c_n| : n=1,2,\ldots,N\}}.$$

Maka didapat

$d(w_n(x_1,y_1),w_n(x_2,y_2))$
$\leq (|a_n|+\theta|c_n|)\,|x_1-x_2| + \theta\,|d_n|\,|y_1-y_2|$
$\leq a\,|x_1-x_2| + \theta\,\delta\,|y_1-y_2|$
$\leq \text{Maks}\{a,\delta\}\,d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$
$= s\,d((x_1,y_1), (x_2,y_2)),$

dengan

$$a = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\text{Maks}\{|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{2}\right) < 1.$$

Nilai a diperoleh dari

$|a_n| + \theta\,|c_n|$

$$= |a_n| + \frac{\text{Min}\{1-|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{\text{Maks}\{2|c_n| : n=1,2,\ldots,N\}}\,|c_n|$$
$$\leq |a_n| + \frac{\text{Min}\{1-|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{2}$$
$$= |a_n| + \frac{1-\text{Maks}\{|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{2}$$
$$\leq \text{Maks}\{|a_n|\} + \frac{1-\text{Maks}\{|a_n| : n=1,\ldots,N\}}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2} + \frac{\text{Maks}\{|a_n| : n=1,2,3,\ldots,N\}}{2},$$

sehingga dapat diambil

$$a = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{Max\{|a_n| : n=1,2,\ldots,N\}}{2}\right) < 1,$$

$\delta = \text{Maks}\{\ |d_n| : n=1, 2,\ldots, N\} < 1$ dan $s=\text{Maks}\{a, \delta\}$. Jadi $\{R^2: w_n,\ n=1, 2, \ldots,N\}$ SFI hiperbolik terhadap metrik d. Menurut **Teorema 3.1**, terdapat dengan tunggal suatu atraktor $G\in \mathbb{H}(R^2)$, i.e. G subhimpunan kompak tak kosong dalam R^2 yang memenuhi $G=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(G)$. **q.e.d.**

Teorema 4.4. *Diberikan bilangan asli $N>1$ dan SFI $\{R^2: w_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$ yang telah dikonstruksikan pada (4.1) dan (4.2), yang berkaitan dengan data $\{(x_n,F_n): n=0,1,2,\ldots, N\}$. Andaikan d_n faktor penyekala vertikal yang memenuhi $0\leq|d_n|<1$ untuk $n = 1,2,\ldots, N$, sehingga SFI hiperbolik. Jika G atraktor dari SFI, maka G merupakan grafik dari suatu fungsi kontinu f_0: $[x_0, x_N]\to R$ yang menginterpolasikan data $\{(x_n,F_n) : n=0,1,2,\ldots,N\}$, i.e. dapat ditulis*

$$G = \{\ (x,f_0(x)) : x\in[x_0,x_N]\ \},$$

dengan $f_0(x_i) = F_i$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Bukti: Difefinisikan

$C^*[x_0, x_N] := \{\ f:[x_0, x_N]\to \mathbf{R}$: f kontinu sehingga $f(x_0) = F_0$ dan $f(x_N) = F_N\ \}$.

Jika $C^*[x_0, x_N]$ dilengkapi dengan d:

$$d(f, g) := \text{Maks}\{|f(x) - g(x)| : x \in [x_0, x_N]\},$$

untuk semua $f, g \in C^*[x_0, x_N]$,

maka telah dikenal dengan baik $(C^*[x_0,x_N],d)$ ruang metrik lengkap (lihat misalnya **Rudin, 1966**). Diberikan a_n, c_n, e_n, f_n, seperti pada persamaan (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) dan didefinisikan suatu operator (pemetaan)

$$T: C^*[x_0, x_N] \to C^*[x_0, x_N],$$

dengan $(Tf)(x) = c_n l_n^{-1}(x) + d_n\, f(l_n^{-1}(x)) + f_n$, $\forall\, x\in[x_{n-1}, x_n]$, dan $l_n:[x_0,x_N]\to[x_{n-1},x_n]$, dengan $l_n(x)=a_nx+e_n$, $n = 1,2,3,\ldots, N$. Pertama akan ditunjukkan T memetakan $C^*[x_0,x_N]$ ke dirinya sendiri, i.e. $(Tf)\in C^*[x_0,x_N]$, untuk semua $f\in C^*[x_0,x_N]$. Perhatikan bahwa l_n mempunyai invers, $l_n^{-1}:[x_{n-1}, x_n] \to[x_0,x_N]$, i.e.

$$l_n^{-1}(x) = \frac{x-e_n}{a_n},\quad a_n \neq 0.$$

Ambil sebarang $f\in C^*[x_0, x_N]$. Dari kesamaan (4.3) dan (4.4), didapat $l_1^{-1}(x_0) = x_0$ dan $l_N^{-1}(x_N) = x_N$, sehingga diperoleh

$(Tf)(x_0) = c_1l_1^{-1}(x_0) + d_1 f(l_1^{-1}(x_0)) + f_1$
$= c_1x_0 + d_1 f(x_0) + f_1$
$= c_1x_0 + d_1F_0 + f_1$
$= F_0$, dan

$(Tf)(x_N) = c_Nl_N^{-1}(x_N) + d_N f(l_N^{-1}(x_N)) + f_N$
$= c_Nx_N + d_N f(x_N) + f_N$
$= c_Nx_N + d_NF_N + f_N$
$= F_N.$

Dari definisinya, jelas Tf kontinu pada setiap interval (x_{n-1}, x_n) untuk $n=1, 2, \ldots,N$. Tinggal ditunjukan Tf kontinu di titik $x_1, x_2,\ldots,x_{N-1}$. Ambil sebarang $n\in\{1,2, \ldots, N-1\}$. Dari (4.3) dan (4.4), dipunyai $l_{n+1}^{-1}(x_n) = x_0$ dan $l_n^{-1}(x_n)=$

x_N, dan akibatnya dari (4.5) didapatkan limit kanan

$$\lim_{x\to x_n^+}(Tf)(x)$$
$$= c_{n+1}l_{n+1}^{-1}(x_n) + d_{n+1}f(l_{n+1}^{-1}(x_n)) + f_{n+1}$$
$$= c_{n+1}x_0 + d_{n+1}f(x_0) + f_{n+1}$$
$$= c_{n+1}x_0 + d_{n+1}F_0 + f_{n+1}$$
$$= F_n,$$

dan dari (4.6) diperoleh limit kiri

$$\lim_{x\to x_n^-}(Tf)(x)$$
$$= c_n l_n^{-1}(x_n) + d_n f(l_n^{-1}(x_n)) + f_n$$
$$= c_n x_N + d_n f(x_N) + f_n$$
$$= c_n x_N + d_n F_N + f_n$$
$$= F_n,$$

sehingga berlaku

$$\lim_{x\to x_n^-}(Tf)(x) = \lim_{x\to x_n^+}(Tf)(x) = (Tf)(x_n),$$

i.e. Tf kontinu di x_n. Jadi $Tf \in C^*[x_0, x_N]$, i.e. T memetakan $C^*[x_0, x_N]$ ke dirinya sendiri.

Selanjutnya ditunjukkan T pemetaan kontraksi pada $(C^*[x_0,x_N],d)$. Ambil sebarang f, $g \in C^*[x_0, x_N]$. Jika $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ dan $x \in [x_{n-1}, x_n]$, maka

$$|(Tf)(x)-(Tg)(x)|$$
$$=|c_n l_n^{-1}(x)+d_n f(l_n^{-1}(x)) + f_n - (c_n l_n^{-1}(x)+d_n g(l_n^{-1}(x))+f_n)|$$
$$= |d_n f(l_n^{-1}(x)) - d_n g(l_n^{-1}(x))|$$
$$= |d_n|\,|f(l_n^{-1}(x)) - g(l_n^{-1}(x))|$$
$$\le |d_n|\, d(f,g).$$

Akibatnya $d(Tf, Tg) \le \delta\, d(f, g)$, dengan $\delta=\text{Maks}\{|d_n|:n=1,2,\ldots, N\}<1$, i.e.T pemetaan kontraksi pada $(C^*[x_0, x_N],d)$. Karena itu menurut Teorema 2.2.2 (Teorema titik tetap), T mempunyai tepat satu titik tetap katakan $f_0\in C^*[x_0, x_N]$, i.e. f_0 memenuhi

$$(Tf_0)(x) = f_0(x) \text{ untuk semua } x \in [x_0, x_N].$$

Dari definisi (Tf_0) dan persamaan (4.6), diperoleh

$$f_0(x_n) = (Tf_0)(x_n)$$
$$= c_n l_n^{-1}(x_n) + d_n f_0(l_n^{-1}(x_n)) + f_n$$
$$= c_n x_N + d_n f_0(x_N)) + f_n$$
$$= c_n x_N + d_n F_N + f_n$$
$$= F_n,$$

untuk $n = 0,1, 2, \ldots, N$, sehingga f_0 melalui semua titik $\{(x_n,F_n):n=0,1, 2,\ldots,N\}$. Misalkan $\widetilde{G}$ grafik fungsi f_0, i.e.

$$\widetilde{G} = \{ (x, f_0(x)): x\in[x_0, x_N]\}.$$

Akhirnya ditunjukkan $\widetilde{G}$ merupakan atraktor SFI $\{R^2: w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$. Dari definisi T, diperoleh

$$(Tf_0)(a_nx+e_n) = c_nx + d_nf_0(x) + f_n,$$

untuk $x \in [x_0, x_N]$, untuk $n = 1,2,\ldots,N$.
Akan ditunjukkan

$$\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G}).$$

Dari (4.1) dan persamaan terakhir, diperoleh, untuk setiap $x\in[x_0, x_N]$, untuk $n = 1,2,\ldots,N$, berlaku

$$w_n\begin{pmatrix} x \\ f_0(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_nx+e_n \\ c_nx+d_nf_0(x)+f_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_nx+e_n \\ Tf_0(a_nx+e_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_nx+e_n \\ f_0(a_nx+e_n)\end{pmatrix}.$$

Ambil sebarang $(u,v) \in \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G})$, maka $(u,v)\in w_n(\widetilde{G})$ untuk suatu $n\in\{1,2,\ldots, N\}$, i.e. $(u,v)=w_n((x, f_0(x))$ untuk suatu $(x, f_0(x))\in \widetilde{G}$.

Dari persamaan terakhir, didapatkan

$$(u,v)=w_n((x, f_0(x)) = (a_nx+e_n, f_0(a_nx+e_n)),$$

i.e. $(u,v) \in \widetilde{G}$, dan karena (u,v) diambil sebarang, diperoleh:

$$\bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G}) \subset \widetilde{G}.$$

Sebaliknya, ambil sebarang $(x, f_0(x))\in \widetilde{G}$, maka terdapat $r = l_n^{-1}(x) = \dfrac{x-e_n}{a_n} \in[x_0, x_N]$, untuk suatu $n\in\{1,2,\ldots, N\}$ sehingga berlaku :

$$w_n\begin{pmatrix} r \\ f_0(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n r + e_n \\ c_n r + d_n f_0(r) + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n r + e_n \\ c_n l_n^{-1}(x) + d_n f_0(l_n^{-1}(x)) + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_n(r) \\ Tf_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f_0(x) \end{pmatrix} = (x, f_0(x)),$$

i.e. $(x, f_0(x)) \in w_n(\widetilde{G})$, dan karena $(x, f_0(x))$ dipilih sembarang, didapat

$$\widetilde{G} \subset \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G}).$$

Jadi $\widetilde{G} = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\widetilde{G})$. Menurut Teorema 4.3, terdapat dengan tunggal atraktor G untuk SFI $\{R^2: w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$, i.e. $G \in H(R^2)$, G subhimpunan kompak tak kosong dalam R^2 sehingga $G = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(G)$. Karena f_0 kontinu dan $[x_0, x_N]$ kompak di R, maka $\widetilde{G} = f_0([x_0, x_N])$ kompak tak kosong di R^2. Karena $\widetilde{G}$ tak kosong, maka dari ketunggalan atraktor, disimpulkan $\widetilde{G} = G$, i.e. G merupakan grafik dari f_0. **q.e.d.**

5. CONTOH

Contoh 5.1. Parabola $f(x) = 2x - x^2$ pada interval [0, 2] adalah fungsi interpolasi untuk suatu data {(0,0), (1,3), (2,0)}. Jika G_f adalah grafik fungsi *f*, i.e.

$$G_f = \{(x, 2x - x^2): x \in [0,2]\},$$

maka dapat dibuktikan G merupakan atraktor dari SFI$\{R^2: w_1, w_2\}$, dengan

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pembuktian G atraktor dari SFI $\{R^2: w_1, w_2\}$ diatas, dapat kita buktikan secara langsung.

Untuk setiap $x \in [0,2]$ berlaku persamaan:

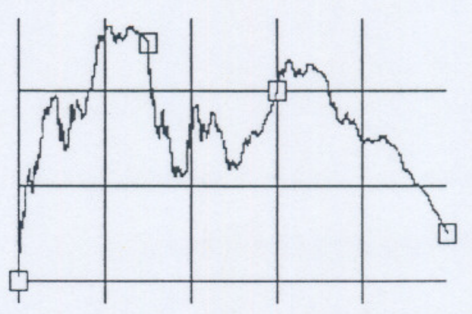
$$w_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2(\frac{1}{2}x) - (\frac{1}{2}x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ f(\frac{1}{2}x) \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ 2(1 + \frac{1}{2}x) - (1 + \frac{1}{2}x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ f(1 + \frac{1}{2}x) \end{pmatrix}$$

Dari hasil diatas jelas terlihat untuk $x \in [0,2]$, w_1 akan membawa *f*(x) pada interval [0,1] dan w_2 akan membawa *f*(x) pada interval [1,2]. Berarti $G = w_1(G) \cup w_2(G)$ dan karena $G \in H(R^2)$, berdasarkan Teorema 3.1, berarti G merupakan atraktor dari SFI diatas. Berdasarkan Definisi 4.2, *f*(x) fungsi interpolasi fraktal.

Contoh 5.1 kurang menarik, karena fungsi interpolasinya diferensiabel (mulus) pada [0,2] dan buktinya diperoleh langsung tanpa proses iterasi. Contoh 5.2 berikut ini lebih menarik, karena fungsi interpolasinya diperoleh secara iteratif dengan program komputer dan rumus fungsinya tidak diketahui. Dari grafik hasil pemrograman, kelihatannya fungsi interpolasi tersebut tidak diferensiabel dan tidak teratur pada interval [0,100].

Contoh 5.2. Diberikan suatu data untuk n=4, i.e. {(0,0), (30,50), (60,40), (100,10)}, dengan $d_1=0.5$, $d_2=-0.5$, $d_3=0.23$. Maka dengan bantuan program komputer (dalam bahasa Pascal Versi 7), diperoleh grafik fungsi interpolasi fraktal seperti pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1: Fungsi Interpolasi Fraktal untuk Data pada Contoh 5.2.

SIMPULAN

Bila diberikan bilangan asli N>1 dan data $\{(x_i, F_i): i = 0,1, 2,\ldots, N\}$, maka terjamin ada dengan tunggal fungsi interpolasi fraktal $f_0:[x_0,x_N]\rightarrow R$, yang grafiknya merupakan atraktor dari SFI $\{R^2:w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$, dengan w_n seperti pada persamaan (4.1) dan (4.2), dan (4.7)-(4.10). Fungsi interpolasi fraktal f_0 dapat diperoleh secara iteratif setelah memasukkan data *faktor penyekala vertikal* $|d_n| <1$, n=1,2,…,N. Grafik fungsi interpolasi f_0 pada umumnya tidak teratur dan tidak diketahui rumusnya secara eksplisit. Nilai faktor penyekala vertikal d_n turut menetukan kekasaran dan kehalusan grafik fungsi interpolasi fraktal.

DAFTAR PUSTAKA

Barnsley, M. and Demko, S. (1985). Iterated Function System and the Global Construction of Fractals. *The Proceeding of the Royal Society of London* A399, 243-275.

Barnsley, M. (1986). *Fractal Function and Interpolation*.Costructive Approximation 2, 303-329.

Barnsley, M. (1988). *Fractal Everywhere*. Boston: Academic Press Inc.

Devaney, R.L. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and experiments*. New York: Addison Wesley Pub. Comp.

Falkoner, K. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundation and Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. San Fransisco: W.H. Freeman and Co.

Rudin, W. (1966). *Principle of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill.

Susanta, B., Soemantri, R., Widodo, Aryati, L., Hendarto, J, and Suprapto (1993). Perkenalan dengan Geometri Fraktal, *Laporan Penelitian,Didanai World Bank XXI, LOAN No:3311-IND, FMIPA UGM.*